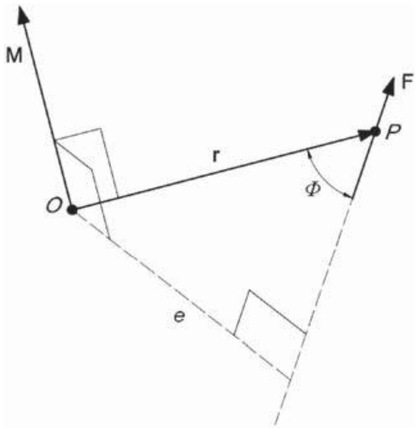
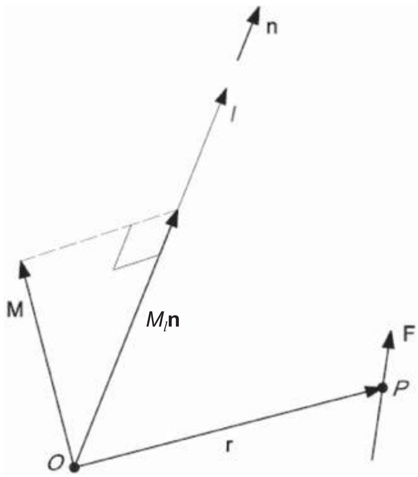


Rys. 4.1. Moment $\mathbf{M}$ siły $\mathbf{F}$ względem punktu O

Innym pojęciem, które się wprowadza przy rozważaniach ruchów rotacyjnych ośrodków materialnych, jest pojęcie wektora siły względem prostej (rys. 4.2). Rozważmy prostą l zawierającą punkt O oraz wersor $\mathbf{n}$ określający kierunek i zwrot tej prostej. Zgodnie z definicją moment siły $\mathbf{F}$ względem prostej l jest wielkością skalarną równą długości składowej wektora momentu $\mathbf{M}$ w kierunku prostej l, tj.

$$M_l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.3}$$



Rys. 4.2. Moment siły $\mathbf{F}$ względem prostej l

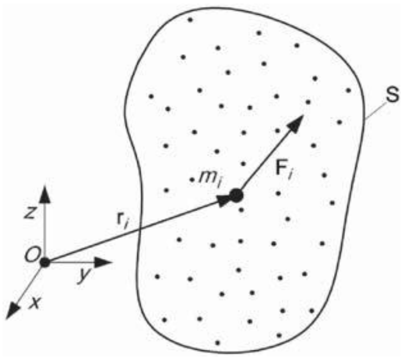
Jeśli na przykład siła $\mathbf{F}$ działa na ciało obracające się wokół stałej prostej l (osi obrotu), to wówczas M_l jest miarą skłonności siły $\mathbf{F}$ do obracania ciała względem prostej l.

Moment M_l nie zależy od wyboru zarówno punktu O, jak i punktu P.

Rozważmy ruch dużej liczby cząstek materialnych wydzielonych z ośrodka materialnego ograniczonego powierzchnią S (rys. 4.3). Każdej i-tej cząstce są przypisane: wektor wodzący (położenia) $\mathbf{r}_i$, masa m_i i siły $\mathbf{F}_{ij}$ o wypadkowej (sumie) $\mathbf{F}_i$. Dla tej cząstki zgodnie z drugim prawem Newtona mamy

$$m_i\mathbf{a}_i = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\mathbf{v}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p}_i\right) = \mathbf{F}_i \tag{4.4}$$

gdzie $\mathbf{p}_i$ – pęd i-tej cząstki.



Rys. 4.3. Grupa cząstek materialnych

Rozważamy obecnie ogólny, uśredniony ruch translacyjny zbioru cząstek, nie zaś indywidualny ruch każdej cząstki. W tym celu możemy zsumować wszystkie równania (4.4); wówczas jest

$$\sum_i m_i\mathbf{a}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p}\right) = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \tag{4.5}$$

gdzie: $\mathbf{p}$ – pęd całego układu punktów materialnych, $\mathbf{F}$ – sumaryczna siła od wszystkich cząstek.

Z kolei gdybyśmy chcieli rozważać ogólny, uśredniony ruch obrotowy zbioru cząstek, odpowiednie równanie miałoby postać

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M} \tag{4.6}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\mathbf{v}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right) - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \mathbf{K}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{K}\right) \tag{4.7}$$